Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 6.05.2010

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na sua folha de respostas, indique claramente a versão do teste. A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

GRUPO I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro opções, das quais só uma está correcta.
- Escreva, na sua folha de respostas, **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à opção que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma opção, ou se a letra transcrita for ilegível, a resposta será classificada com zero pontos.

1. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 1.

Seja f^{-1} a função inversa da função f

Qual é o valor de $f(-4) + f^{-1}(2)$?

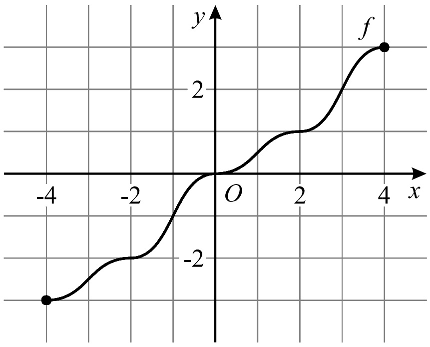

Figura 1

(A) -2 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

2. Sejam f e g duas funções reais de variável real.

Sabe-se que:

- a função f tem domínio $\mathbb{R}$ e tem cinco zeros;
- a função g tem domínio $\mathbb{R}$ e tem três zeros;
- um, e só um, dos zeros da função f também é zero da função g

Quantos zeros tem a função $\dfrac{f}{g}$?

(A) 7 **(B)** 5 **(C)** 4 **(D)** 2

3. Seja f a função cujo gráfico está representado na figura 2.

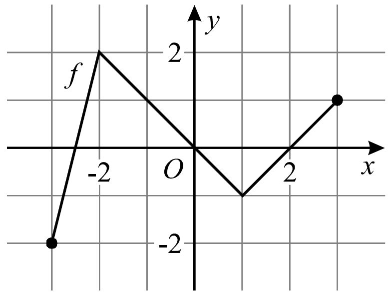

Figura 2

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = -x + 3$$

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

4. Na figura 3, está representado um triângulo rectângulo $[ABC]$ cujos lados medem 3, 4 e 5

Considere que um ponto D se desloca ao longo do cateto $[AB]$, nunca coincidindo com o ponto A

Para cada posição do ponto D, seja x o comprimento do segmento de recta $[AD]$

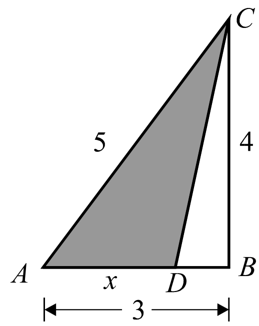

Figura 3

Qual das expressões seguintes dá o perímetro do triângulo $[ACD]$, em função de x ?

(A) $x + 4 + \sqrt{25 - x^2}$ **(B)** $x + 5 + \sqrt{25 - x^2}$

(C) $x + 4 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$ **(D)** $x + 5 + \sqrt{x^2 - 6x + 25}$

5. Seja $[AB]$ um diâmetro de uma esfera de centro C e raio 4

Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \,.\, \overrightarrow{CB}$?

(A) 16 **(B)** -16 **(C)** $4\sqrt{2}$ **(D)** $-4\sqrt{2}$

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Na figura 4, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, parte de um plano ABC

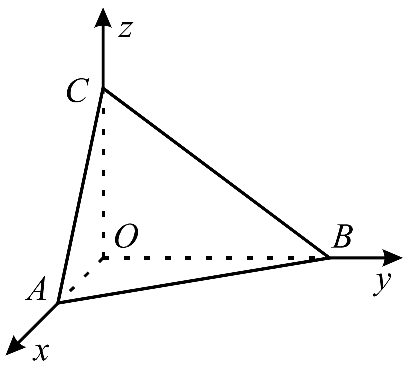

Figura 4

Cada um dos pontos A, B e C pertence a um eixo coordenado.

O plano ABC é definido pela equação $6x + 3y + 4z = 12$

Seja r a recta que passa no ponto A e é perpendicular ao plano ABC

Determine uma equação vectorial da recta r

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica E, de equação

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$$

Para um certo valor de α pertencente ao intervalo $\left]0\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$, o ponto P, de coordenadas $(\operatorname{tg}\alpha\,,\ \operatorname{sen}\alpha\,,\ 2 + \cos\alpha)$, pertence à superfície esférica E

Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto P

3. Num certo ecossistema habitam as espécies animais A e B.

Admita que, t anos após o início do ano 2009, o número de animais, em **milhares**, da espécie A é dado aproximadamente por

$$a(t) = \frac{11\,t + 6}{t + 1} \qquad (t \geq 0)$$

e que o número de animais, em **milhares**, da espécie B é dado aproximadamente por

$$b(t) = \frac{t + 9}{t + 3} \qquad (t \geq 0)$$

Resolva os dois itens seguintes, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

3.1. Desde o início do ano 2009 até ao início do ano 2010, morreram 500 animais da espécie A.

Determine quantos animais dessa espécie nasceram nesse intervalo de tempo.

3.2. Na figura 5, estão representadas graficamente as funções a e b

Tal como estes gráficos sugerem, a **diferença** entre o número de animais da espécie A e o número de animais da espécie B vai aumentando, com o decorrer do tempo, e tende para um certo valor.

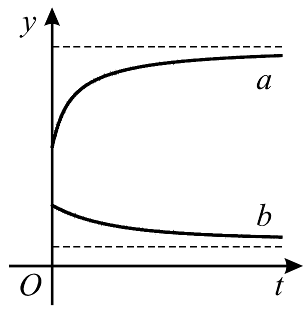

Figura 5

Determine esse valor, recorrendo às assimptotas horizontais dos gráficos das funções a e b, cujas equações deve apresentar.

4. Considere:

- a função f, de domínio $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, definida por $f(x) = 3 + \dfrac{6}{x}$
- a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \dfrac{1}{3}\,x^3 - 3x^2 + 8x - 3$

Resolva os itens **4.1.**, **4.2.** e **4.3.**, **usando exclusivamente métodos analíticos**.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos.

4.1. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação $f(x) \leq 5$

Apresente a sua resposta utilizando a notação de intervalos de números reais.

4.2. Seja P o ponto do gráfico da função f que tem abcissa igual a 2

Seja r a recta tangente ao gráfico da função f no ponto P

Determine a equação reduzida da recta r

4.3. Na figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g

Os pontos A e B pertencem ao gráfico da função g, sendo as suas ordenadas, respectivamente, o máximo relativo e o mínimo relativo desta função.

Os pontos C e D pertencem ao eixo Ox. A abcissa do ponto C é igual à do ponto B e a abcissa do ponto D é igual à do ponto A

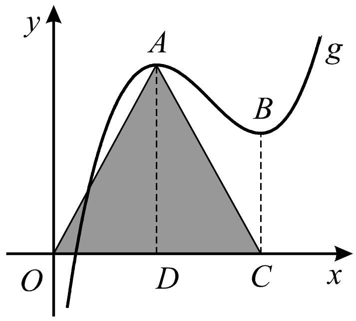

Figura 6

Determine a área do triângulo $[OAC]$

4.4. A equação $f(x) = g(x)$ tem exactamente duas soluções, sendo uma delas positiva e a outra negativa.

Determine a solução positiva, **utilizando as capacidades gráficas da sua calculadora**.

Apresente essa solução arredondada às centésimas.

Apresente o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora e assinale o ponto relevante para a resolução do problema.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I .... (5 × 10 pontos) .... **50 pontos**

GRUPO II .... **150 pontos**

1. .... 20 pontos

2. .... 20 pontos

3. .... 35 pontos

3.1. .... 15 pontos

3.2. .... 20 pontos

4. .... 75 pontos

4.1. .... 20 pontos

4.2. .... 20 pontos

4.3. .... 20 pontos

4.4. .... 15 pontos

TOTAL .... **200 pontos**