Teste Intermédio

Matemática A

Versão 1

Duração do Teste: 90 minutos | 11.03.2009

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Na folha de respostas, indique claramente a versão do teste.
A ausência dessa indicação implica a classificação das respostas aos itens de escolha múltipla com zero pontos.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\quad$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\qquad$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \,.\, \cos b + \operatorname{sen} b \,.\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \,.\, \cos b - \operatorname{sen} a \,.\, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \,.\, \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho\, cis\, \theta)^n = \rho^n\, cis\, (n\,\theta)$

$\sqrt[n]{\rho\, cis\, \theta} = \sqrt[n]{\rho}\; cis\, \dfrac{\theta + 2\,k\,\pi}{n}\;,\; k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1\, p_1 + ... + x_n\, p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2\, p_1 + ... + (x_n - \mu)^2\, p_n}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.\, v + u\,.\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'.\, v - u\,.\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\, u^{n-1}\,.\, u' \qquad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\, \cos u$

$(\cos u)' = -\, u'.\, \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.\, e^u$

$(a^u)' = u'.\, a^u.\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\,.\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \qquad (p \in \mathbb{R})$

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que seleccionar para responder a esse item.
- **Não apresente cálculos, nem justificações**.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. A Ana, a Bárbara, a Catarina, o Diogo e o Eduardo vão sentar-se num banco corrido, com cinco lugares.
De quantas maneiras o podem fazer, ficando uma rapariga no lugar do meio?

(A) 27 **(B)** 72 **(C)** 120 **(D)** 144

2. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{3}{n}$	$\frac{4}{n}$	$\frac{5}{n}$

Qual é o valor de n?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 12 **(D)** 15

3. Na figura 1 está representado o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.

Tal como a figura sugere, a recta de equação $y = 1$ é assimptota do gráfico de f.

Indique o valor de

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(x)}{x} - f(x) \right]$$

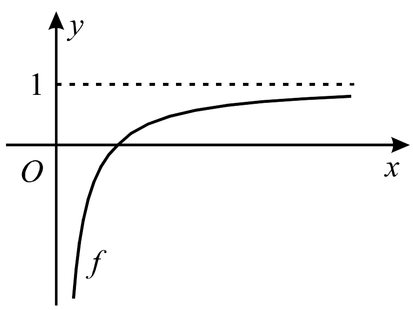


Figura 1

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

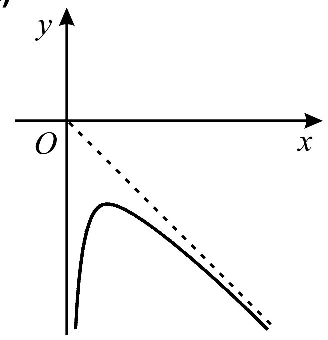
4. De uma função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, sabe-se que:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} [g(x) - x] = 0$$

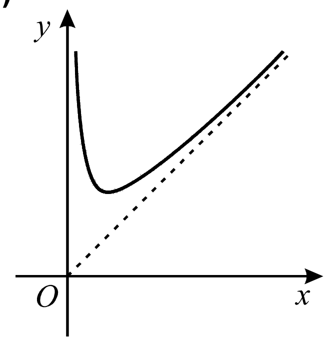
Em cada uma das alternativas apresentadas abaixo, está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico de uma função e, a tracejado, uma assimptota desse gráfico.

Em qual das alternativas pode estar representado o gráfico de g ?

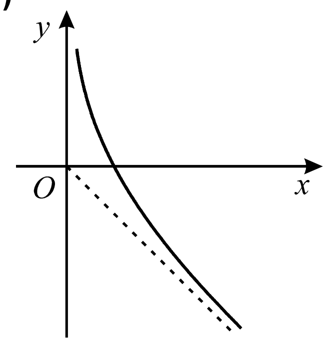
(A)



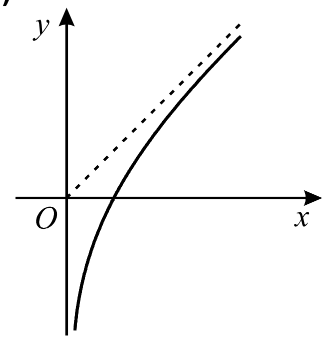
(B)



(C)



(D)



5. Para um certo valor de a, é **contínua** em $\mathbb{R}$ a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & se \ \ x < a \\ x^2 - x + 3 & se \ \ x \geq a \end{cases}$$

Qual é o valor de a ?

(A) -3 **(B)** -2 **(C)** 2 **(D)** 3

Grupo II

Nas respostas a itens deste grupo apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Um saco contém onze bolas, numeradas de 1 a 11.

1.1. Ao acaso, tiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : «o número da primeira bola retirada é par»

B : «o número da segunda bola retirada é par»

Indique o valor de $P(B|\overline{A})$, na forma de fracção irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|\overline{A})$ no contexto da situação descrita.

1.2. Considere novamente o saco com a sua constituição inicial.

Ao acaso, extraem-se simultaneamente três bolas do saco e anotam-se os respectivos números.

Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (13-x) \leq 5$$

Apresente a sua resposta na forma de união de intervalos de números reais.

3. Quando uma substância radioactiva se desintegra, a sua **massa**, medida em **gramas**, varia de acordo com uma função do tipo

$$m(t) = a\,e^{bt}\ , \quad t \geq 0\,,$$

em que a variável t designa o **tempo**, medido em **milénios**, decorrido desde um certo instante inicial. A constante real b depende da substância e a constante real a é a massa da substância no referido instante inicial.

Resolva as alíneas seguintes sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar cálculos numéricos.

3.1. O *carbono-14* é uma substância radioactiva utilizada na datação de fósseis em que esteja presente.

Relativamente a um certo fóssil, sabe-se que:

- a massa de *carbono-14* nele presente, mil anos depois de um certo instante inicial, era de 2,91 g
- a massa de *carbono-14* nele presente, dois mil anos depois do mesmo instante inicial, era de 2,58 g

Tendo em conta estes dados, determine:
- o valor da constante b para o *carbono-14*;
- a massa de *carbono-14* que existia no fóssil, no referido instante inicial.

Apresente os dois valores arredondados às centésimas.

Nota: se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

3.2. O *rádio-226* é outra substância radioactiva.
Em relação ao *rádio-226*, sabe-se que $b = -0{,}43$

Verifique que, quaisquer que sejam os valores de a e de t, $\dfrac{m(t+1{,}6)}{m(t)}$ é constante.

Determine o valor dessa constante, arredondado às décimas, e interprete esse valor, no contexto da situação descrita.

4. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 3}{x^2 - 2x + 1} & se \;\; x < 1 \\ \ln(x) - e^{1-x} & se \;\; x \geq 1 \end{cases}$

4.1. Sem recorrer à calculadora, estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, **paralelas aos eixos coordenados**.
Indique uma equação para cada assimptota encontrada.

4.2. Na figura 2 está representada, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f

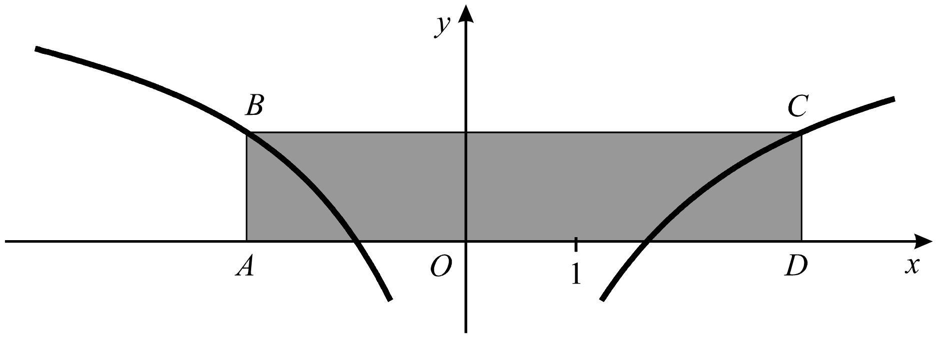


Figura 2

O rectângulo $[ABCD]$ tem dois vértices no eixo Ox, estando os outros dois no gráfico de f. O ponto A tem abcissa -2.

Determine a área do rectângulo $[ABCD]$.

Nota:
Na resolução deste problema vai necessitar de determinar a abcissa do ponto C.
Para tal, utilize as capacidades gráficas da sua calculadora.
Reproduza na sua folha de prova a parte do gráfico de f que visualizou, bem como a recta BC. Assinale também o ponto C e apresente a sua abcissa arredondada às centésimas.

Apresente a área pedida igualmente arredondada às centésimas.

5. De uma função f de domínio $[1, 2]$ sabe-se que:

- f é contínua em todo o seu domínio
- $\forall\, x \in [1, 2], \;\; f(x) < 0$
- $f(1) = 3\, f(2)$

Seja g a função de domínio $[1, 2]$ definida por $g(x) = 2\, f(x) - f(1)$

Prove que a função g tem pelo menos um zero.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I ....**(5 $\times$ 10 pontos)** ....**50 pontos**

Grupo II ....**150 pontos**

1. .... 40 **pontos**
  1.1. ....20 pontos
  1.2. ....20 pontos

2. .... 20 **pontos**

3. .... 35 **pontos**
  3.1. ....20 pontos
  3.2. ....15 pontos

4. .... 35 **pontos**
  4.1. ....20 pontos
  4.2. ....15 pontos

5. .... 20 **pontos**

TOTAL .... **200 pontos**